

Nombres Complexes

1

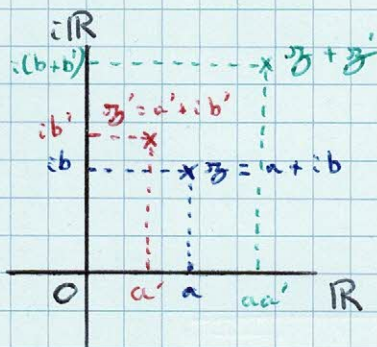
i est un nombre dit "imaginaire"

$$i^2 = -1; i \in \mathbb{C}$$

$$\text{Re}(z) \quad \text{Im}(z)$$

Tout nombre complexe peut s'écrire $z = a + ib$

Représentation graphique: (forme algébrique)



Bas de notation d'axe

$$\text{Re} : z + 2i < 2 + 3i$$

$$1 + i < 0$$

Addition:

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$

$$\text{Alors } z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

$$\text{Re}(z + z') \quad \text{Im}(z + z')$$

Multiplication:

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$

$$\text{Alors } zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

$$\text{Re}(zz') \quad \text{Im}(zz')$$

Conjugué et module:

On a $z = a + ib$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{conjugué: } \bar{z} = a - ib \\ \text{module: } |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \end{array} \right.$

Formule:

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

$$|z| = \sqrt{z \bar{z}} \quad (|z|^2 = z \bar{z})$$

Racines carrées:

$$w^2 = z$$

$$w_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} + i \sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})}$$

$$w_2 = -w_1$$

Equations du second degré:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si $\Delta > 0 \rightarrow$ deux solutions réelles $\Rightarrow \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{\Delta})$

Si $\Delta = 0 \rightarrow$ une solution réelle $\Rightarrow \frac{-b}{2a}$

Si $\Delta < 0 \rightarrow$ deux solutions complexes conjuguées

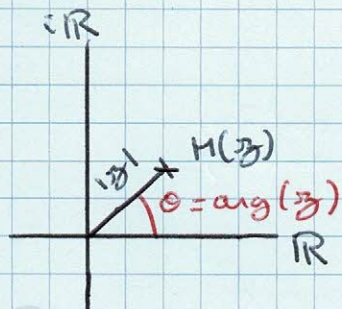
$$\Rightarrow \frac{1}{2a}(-b \pm i\sqrt{-\Delta})$$

$\uparrow$ bien $-\Delta$

Argument:

$$\arg(z) = \theta$$

$$z = |z| (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \quad (\text{écriture trig})$$

Propriétés:

- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$
- $\arg(z z') = \arg(z) + \arg(z')$
- $\arg(z^n) = n \arg(z)$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$

Formule de Moivre:

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Série exponentielle complexe:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad (\text{forme exponentielle})$$

Ainsi, $\forall$ nombre $z \in \mathbb{C}$, $z = |z| e^{i\theta}$
avec $\theta = \arg(z) \in \mathbb{R}$

Formule d'Euler :

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

Linéarisation :

→ réécrire $\cos^n(x)$ sous forme $\cos(Rx)$
 $\sin^n(x)$ sous forme $\sin(Rx)$

Développement :

→ réécrire $\cos(n\theta)$ sous forme $\cos^n(\theta)$
 $\sin(n\theta)$ sous forme $\sin^n(\theta)$